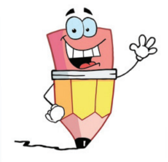
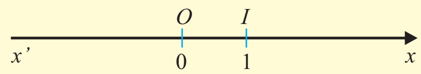
Intentions pédagogiques



Les Activités

Observer • Découvrir • Prévoir le cours

5 On considère un axe $x'Ox$



Recopie et complète par $\leq$ ou $\geq$:

a) La demi-droite $[Ox)$ représente les nombres x tels que $x \dots 0$.

b) La demi-droite $[Ox')$ représente les nombres x tels que $x \dots 0$.

Les Savoirs

Connaître les notions de base
Maîtriser : règles, formules, théorèmes

III Longueur d'un arc de cercle

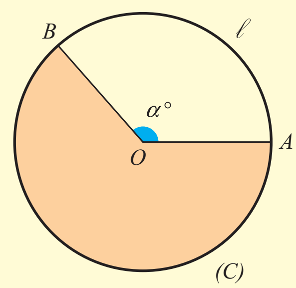
Dans un cercle, la longueur d'un arc est proportionnelle à l'angle au centre qui intercepte cet arc.

Le cercle $C(O\,;R)$, de longueur $2\pi R$, est un arc de mesure 360°.

En désignant par ℓ la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, et en posant $\widehat{AOB} = \alpha°$, on a le tableau de proportionnalité :

Mesure de l'arc	360°	$\alpha°$
Longueur de l'arc	$2\pi R$	ℓ

On en déduit la règle de calcul : $\ell = 2\pi R \times \dfrac{\alpha°}{360°}$.



Les Savoir-faire

Apprendre à appliquer le cours • Rédiger une solution

2 SAVOIR Résoudre une équation du type $x^2 = a$

Énoncé Résoudre les équations : $x^2 = 3$; $(x-1)^2 = 5$.

Solution
- Puisque $3 > 0$, alors $x^2 = 3$ donne $x = -\sqrt{3}$ ou $x = +\sqrt{3}$.
- Puisque $5 > 0$, alors $(x-1)^2 = 5$ donne $x - 1 = -\sqrt{5}$ ou $x - 1 = \sqrt{5}$.

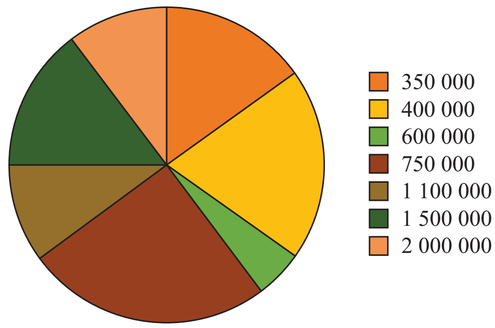
On en déduit : $x = 1 - \sqrt{5}$ ou $x = 1 + \sqrt{5}$.

Intentions pédagogiques

Savoir Appliquer

Appliquer • S'entraîner • Trouver des méthodes

4 Une enquête sur les salaires en L.L. de 540 personnes a fait apparaître les résultats suivants donnés sous forme de diagramme circulaire.



1° Dresser un tableau montrant les effectifs et les effectifs cumulés.
2° Tracer le diagramme en bâtons et le polygone des effectifs cumulés.

Savoir Être Compétent

Approfondir • Chercher • Évaluer ses connaissances

14 Tracer un triangle ABC.
Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.
On désigne par E l'image de A par T, F l'image de E par T et D l'image de F par T.
1° Construire les trois points E, F et D et montrer qu'ils sont alignés.
2° Montrer que $ABCD$ est un trapèze et calculer sa base moyenne en fonction de BC.
3° Exprimer l'aire de ce trapèze en fonction de celle de ABC.

Raisonner

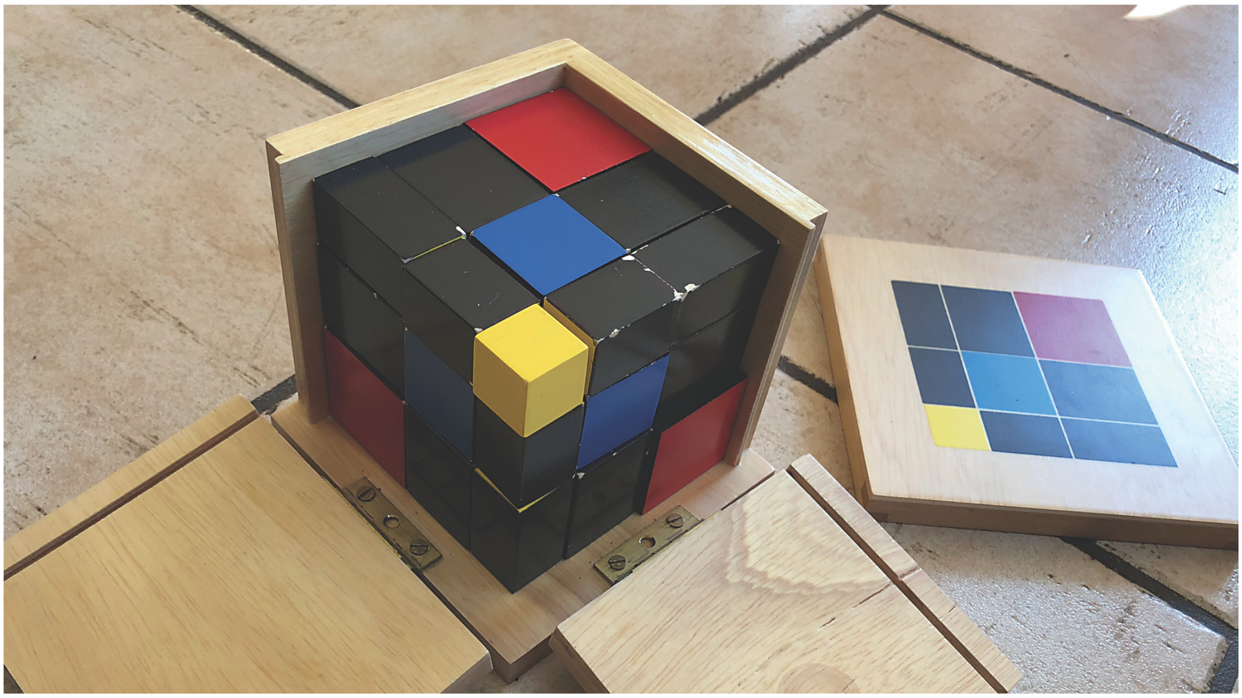
Vrai / Faux • QCM • Justifier • Démontrer

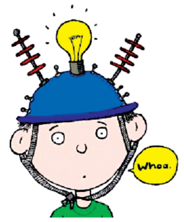
24 **QCM** Pour chaque question, choisir la bonne réponse en justifiant.

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1° $\sqrt{15^2 + 8^2} = ...$	$15 + 2$	$15 + 4$	$15 + 8$
2° $\left(\sqrt{2}\right)^2 \times \left(\sqrt{2}\right)^3 = ...$	$\left(\sqrt{2}\right)^6$	$4\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$
3° Pour $a > 0$, $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \dots$	1	$\dfrac{\sqrt{a}}{2}$	$\sqrt{a}$
4° Si $a = 10^{16}$, alors $\sqrt{a} = \dots$	10^8	10^{14}	10^4

Chapitre 7

Identités remarquables





Les Savoirs

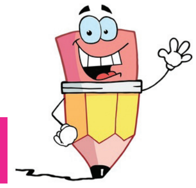
I. Vocabulaire
II. Une première identité remarquable : Carré d'une somme
III. Une deuxième identité remarquable : Carré d'une différence
IV. Troisième identité remarquable : Produit d'une somme par une différence

Les Savoir-faire

Savoir établir et utiliser deux identités particulières
Savoir factoriser une expression du modèle $a^2 + b^2 + 2ab$
Savoir factoriser une expression du modèle $a^2 + b^2 - 2ab$
Savoir factoriser une expression du modèle $a^2 + b^2$
Savoir Factoriser par étapes

Chapitre 7

Identités remarquables



Activités

1 **On considère les deux nombres : $a = 5$ et $b = 3$.**

1° Calcule : $(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $a^2 + b^2$; $a^2 - b^2$.

2° Recopie et complète par = ou ≠ :

i. $(a + b)^2$ …… $a^2 + b^2$; ii. $(a - b)^2$ …… $a^2 - b^2$

iii. $(a - b)^2$ …… $a^2 + b^2$; iv. $a^2 + b^2$ …… $a^2 - b^2$

3° i. Calcule : ab ; $2\,ab$; $2a \times 2b$.

ii. Complète par = ou ≠ : $2ab$ …… $2a \times 2b$.

2 **On considère les expressions algébriques : $A = (x - 1)\,(x^2 + x + 1)$ et $B = x^3 - 1$.**

1° Pour $x = 2$, vérifie que : $A = B$.

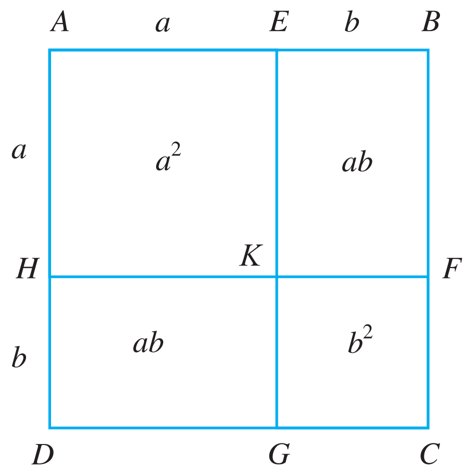
2° Vrai ou Faux ?

Les expressions algébriques A et B sont identiques pour n'importe quelle valeur de x.

3 **Le carré $ABCD$ a pour côté $(a + b)$.**

1° Exprime son aire S à l'aide de a et b.

2° L'aire S est aussi égale à la somme des aires des deux carrés $AEKH$ et $GCFK$, et des deux rectangles $DGKH$ et $EBFK$.
Vérifie que : $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.



4 **On considère deux nombres quelconques a et b.**

1° Effectue et réduis le produit $P = (a + b)\,(a - b)$.

2° Calcule le produit $Q = (5 + 3)\,(5 - 3)$ de deux façons différentes.

5 **On considère deux nombres quelconques a et b.**

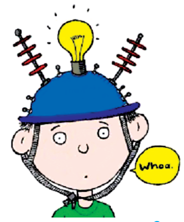
Recopie et complète par = ou ≠ :

i. $(-a)\,(-b)$ …… $-ab$; ii. $(-a)\,(-b)$ … ab

iii. $(-a - b)\,(a - b)$ …… $-(a + b)\,(a - b)$; iv. $(a - b)\,(b - a)$ …… $-(a - b)^2$.

Chapitre 7

Identités remarquables



Les Savoirs

I Vocabulaire

On désigne par a et b deux nombres relatifs.

❶ Carré d'une somme ; somme des carrés

$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$

- Le carré de la somme de a et de b est noté $(a+b)^2$.
- La somme des carrés de a et de b est notée a^2+b^2.

❷ Carré d'une différence ; différence des carrés

$(a-b)^2 \neq a^2-b^2$

- Le carré de la différence de a et de b est noté $(a-b)^2$.
- La différence des carrés de a et de b est notée a^2-b^2.

❸ Double - produit de deux nombres

$2ab = 2 \times a \times b$

L'expression $2\,ab$ représente le <u>double-produit</u> des deux nombres a et b.

❹ Identité

L'égalité littérale $a^2b - ab^2 = ab(a-b)$ est une <u>identité</u> :
elle est vérifiée pour n'importe quelles valeurs numériques données aux lettres a et b.

II Une première identité remarquable : Carré d'une somme

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

* Le carré de la somme de deux nombres est égale à la somme des carrés de ces deux nombres <u>augmentée</u> de leur double – produit.

<u>Justification</u> : $(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = a^2+ab+ab+b^2$.
On en déduit : $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

* <u>Développer</u> $(a+b)^2$, c'est l'écrire sous la forme a^2+b^2+2ab :

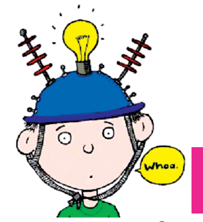
Carré à développer	Technique de développement	Forme développée
$(2x+3)^2$	$(2x)^2+(3)^2+2(2x)\,(3)$	$4x^2+9+12x$

* <u>Application numérique</u>

Pour calculer mentalement 52^2 par exemple, on remarquera que $52 = 50 + 2$.
D'où : $52^2 = (50+2)^2 = 50^2 + 2^2 + 2\,(50)\,(2)$.
On en déduit : $52^2 = 2\,500 + 4 + 200 = 2\,704$.

Chapitre 7

Identités remarquables



Les Savoirs

III Une deuxième identité remarquable : Carré d'une différence

* Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres diminuée de leur double – produit.

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

Justification : $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2$.
On en déduit : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

* Développer $(a-b)^2$, c'est l'écrire sous la forme $a^2 + b^2 - 2ab$:

Carré à développer	Technique de développement	Forme développée
$(2x-3)^2$	$(2x)^2 + (3)^2 - 2(2x)(3)$	$4x^2 + 9 - 12x$

* Application numérique

Pour calculer mentalement 48^2 par exemple, on remarquera que $48 = 50 - 2$.
D'où : $48^2 = (50-2)^2 = 50^2 + 2^2 - 2\,(50)\,(2)$.
On en déduit : $48^2 = 2\,500 + 4 - 200 = 2\,304$.

IV Troisième identité remarquable : Produit d'une somme par une différence

* Pour deux nombres a et b, le produit de la somme $(a+b)$ par la différence $(a-b)$ est égal à la différence $a^2 - b^2$ de leurs carrés respectifs.

Justification : $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

* Développer le produit $(a+b)(a-b)$, c'est l'écrire sous la forme $a^2 - b^2$:

Produit à développer	Technique de développement	Forme développée
$(2x+3)(2x-3)$	$(2x)^2 - (3)^2$	$4x^2 - 9$

* Application numérique

Pour calculer mentalement 52×48 par exemple, on remarquera que $52 = 50 + 2$ et $48 = 50 - 2$.
D'où : $52 \times 48 = (50+2)(50-2) = (50)^2 - (2)^2$.
On en déduit : $52 \times 48 = 2\,500 - 4 = 2\,496$.

Chapitre 7

Identités remarquables

Les Savoir-faire

1 SAVOIR Établir et utiliser deux identités particulières

Énoncé

1° Démontrer les égalités : i. $(-a-b)^2 = (a+b)^2$; ii. $(-a+b)^2 = (a-b)^2$.
2° Développer et réduire l'expression $P = (-2x-5)^2 - (-3x+4)^2$.

Solution

1° On sait que deux nombres opposés ont le même carré : $(-x)^2 = x^2$. D'où :

- Puisque $(-a-b)$ est l'opposé de $(a+b)$, alors $(-a-b)^2 = (a+b)^2$.
- Puisque $(-a+b)$ est l'opposé de $(a-b)$, alors $(-a+b)^2 = (a-b)^2$.

2° On a : $P = (-2x-5)^2 - (-3x+4)^2 = (2x+5)^2 - (3x-4)^2$.

D'où : $P = \left[(2x)^2 + (5)^2 + 2(2x)(5)\right] - \left[(3x)^2 + (4)^2 - 2(3x)(4)\right]$

$P = \left[4x^2 + 25 + 20x\right] - \left[9x^2 + 16 - 24x\right]$

$P = 4x^2 + 25 + 20x - 9x^2 - 16 + 24x$

$P = -5x^2 + 44x + 9.$

2 SAVOIR Factoriser une expression du modèle $a^2 + b^2 + 2ab$

Méthode

Factoriser $(a^2 + b^2 + 2ab)$, c'est l'écrire sous la forme $(a+b)^2$.

Énoncé

1° Factoriser l'expression $E = 9x^2 + 25 + 30x$.
2° En déduire une écriture de l'expression $F = 18x^2 + 50 + 60x$ sous la forme $k\,(a+b)^2$.

Solution

1° On a : $9x^2 = (3x)^2$; $25 = (5)^2$; $30x = 2\,(3x)\,(5)$.
D'où : $E = (3x)^2 + (5)^2 + 2\,(3x)\,(5) = (3x+5)^2$.
2° $F = 18x^2 + 50 + 60x = 2\,(9x^2 + 25 + 30x)$.
D'où : $F = 2\,(3x+5)^2$, écriture sous la forme $k\,(a+b)^2$.

3 SAVOIR Factoriser une expression du modèle $a^2 + b^2 - 2ab$

Méthode

Factoriser $(a^2 + b^2 - 2ab)$, c'est l'écrire sous la forme $(a-b)^2$.

Énoncé

1° Factoriser l'expression $G = 4x^2 - 28x + 49$.
2° En déduire une écriture de l'expression $H = -4x^3 + 28x^2 - 49x$ sous la forme $k\,(a-b)^2$.

Solution

1° On a : $4x^2 = (2x)^2$; $49 = (7)^2$; $28x = 2\,(2x)\,(7)$.
D'où : $G = (2x)^2 + (7)^2 - 2\,(2x)\,(7) = (2x-7)^2$.
2° $H = -4x^3 + 28x^2 - 49x = -x\,(4x^2 - 28x + 49)$.
D'où : $H = -x\,(2x-7)^2$, écriture sous la forme $k\,(a-b)^2$.

Chapitre 7

Identités remarquables

Les Savoir-faire

4 SAVOIR Factoriser une expression du modèle $a^2 - b^2$ (Différence de deux carrés).

Méthode Factoriser $a^2 - b^2$, c'est l'écrire sous la forme $(a+b)(a-b)$.

Énoncé Factoriser les expressions : $M = 4x^2 - 81$; $P = (-2x-5)^2 - (-3x+4)^2$.

Solution

- $M = 4x^2 - 81$
  $M = (2x)^2 - (9)^2$
  $M = (2x+9)(2x-9)$

- $P = (-2x-5)^2 - (-3x+4)^2$
  $P = \left[(-2x-5) + (-3x+4)\right]\left[(-2x-5) - (-3x+4)\right]$
  $P = \left[-2x-5-3x+4\right]\left[-2x-5+3x-4\right]$
  $P = (-5x-1)(x-9)$

5 SAVOIR Factoriser par étapes

Énoncé

1° Décomposer l'expression algébrique $A = (x-3)^3 - 4(x-3)$ en un produit de trois facteurs.

2° Factoriser l'expression $B = (6x-10)^2 + (5-3x)(2x+5) - 9x^2 + 25$.

Solution

1°

$A = (x-3)^3 - 4(x-3)$	**Commentaires**
$A = (x-3)\left[(x-3)^2 - 4\right]$	On prend $(x-3)$ pour facteur commun
$A = (x-3\left[x-3+2\right]\left[x-3-2\right]$	$(x-3)^2 - 4$, c'est comme $a^2 - b^2$
$A = (x-3)(x-1)(x-5)$	On réduit les facteurs

2° Première étape

- On a : $6x - 10 = 2(3x-5)$.
  D'où : $(6x-10)^2 = \left[2(3x-5)\right]^2 = 4(3x-5)^2$.
- $5 - 3x$ est l'opposé de $3x - 5$. D'où : $(5-3x) = -(3x-5)$.
- $-9x^2 + 25$ est l'opposé de $9x^2 - 25$.
  D'où : $-9x^2 + 25 = -(9x^2 - 25) = -(3x+5)(3x-5)$.

Deuxième étape

$B = (6x-10)^2 + (5-3x)(2x+5) - 9x^2 + 25$

$B = 4(3x-5)^2 - (3x-5)(2x+5) - (3x+5)(3x-5)$

$B = (3x-5)\left[4(3x-5) - (2x+5) - (3x+5)\right]$

$B = (3x-5)\left[12x - 20 - 2x - 5 - 3x - 5\right]$

$B = (3x-5)(7x-30)$.

Chapitre 7

Identités remarquables

Savoir Appliquer

Développements

Pour les exercices 1 à 5, on demande de développer chaque expression en utilisant les identités remarquables.

1 $A = (a + 2)^2$; $B = (3x + 5)^2$; $C = (x^2 + 3y)^2$; $D = (2{,}5x^2 + 4x)^2$.

2 $E = (a - 4)^2$; $F = (4x - 7)^2$; $G = (2x - 1{,}5)^2$; $H = (x^3 - 2xy)^2$.

3 $I = (a + 3)(a - 3)$; $J = (4x + 9)(4x - 9)$; $K = (x^2 - 2y)(x^2 + 2y)$;
$L = (x^2 - y^3)(x^2 + y^3)$.

4 $M = (-xy + 2y)^2$; $N = (-x^2 - 8)(-x^2 + 8)$; $O = (-y^2 - 10y)^2$.

5 $P = \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2$; $Q = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{3x}{2}\right)^2$; $R = \left(\frac{x}{4} + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{x}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

Pour les exercices 6 à 8, on demande de développer et de réduire chacune des expressions algébriques.

6 $S = x + x(x + 2)^2$; $T = 2 - 2(x + 2)^2$; $U = (x - 2)(x + 2)^2$.

7 $V = (2 + 3x)^2 - 16x^2$; $W = -(-4y + 3)^2 + 4$; $X = 9 - (-3t - 2)^2$.

8 $Y = (3x + 4)^2 - (2x - 5)^2 - (5x - 2)(5x + 2)$; $Z = 2(-2x - 3)^2 - 3(-x + 4)^2$.

Chapitre 7

Identités remarquables

Savoir Appliquer

Factorisations

Pour les exercices 9 à 12, on demande de factoriser chaque expression en utilisant les identités remarquables.

9 $A = a^2 + 2a + 1$; $B = 4x^2 + 25 + 20x$; $C = 4xy + 4y^2 + x^2$.

10 $D = a^2 - 6a + 9$; $E = 16x^2 + 81 - 72x$; $F = -4x^2 + x^4 + 4$.

11 $G = a^2 - 16$; $H = 4x^2 - 49$; $I = 25x^2 - 64y^2$.

12 $J = \frac{a^2}{4} - a + 1$; $K = 16b^2 - \frac{25}{9}$; $L = \frac{2}{3}c + 1 + \frac{c^2}{9}$.

Pour les exercices 13 à 15, on demande d'écrire chaque expression sous l'une des formes $k(a+b)^2$, $k(a-b)^2$ ou $k(a+b)(a-b)$.

13 $M = 3a^2 + 12a + 12$; $N = 4x^3 - 12x^2 + 9x$; $O = 2x^3 - 8x$.

14 $P = -9x^2 + 30x - 25$; $Q = -16x^2 + 9$; $R = -4x^2 - 36x - 81$.

15 $S = 2x^3 + 8x^2y + 8xy^2$; $T = -x^4 + 12x^3 - 36x^2$; $U = -4x^3y + 9xy^3$.

Pour les exercices 16 et 17, on demande de factoriser chaque « différence de deux carrés ».

16 $V = (2 + 3x)^2 - 16x^2$; $W = 4 - (4y - 3)^2$; $X = 9 - (3t + 2)^2$.

17 $Y = (3x + 1)^2 - (2x - 5)^2$; $Z = (2x^2 + 5)^2 - (x^2 - 3)^2$.

Chapitre 7

Identités remarquables

Savoir Appliquer

Applications numériques

18 Calculer chaque expression en utilisant les identités remarquables :

1° $a = (80 + 1)^2$; $b = (80 - 1)^2$; $c = (80 + 1)(80 - 1)$.

2° $d = 102^2$; $e = 98^2$; $f = 102 \times 98$.

19 Calculer les expressions numériques :

1° $g = 75^2 - 25^2$; $h = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$.

2° $i = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $j = \left(\frac{11}{4}\right)^2 - 2 \times \frac{11}{4} \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Savoir Être Compétent

20 ***QCM*** Pour chaque question, choisir la bonne réponse en justifiant :

	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1° $4x^2 + x^4 + 4 = \ldots$	$(2x + 2)^2$	$(2x + x^2)^2$	$(2 + x^2)^2$
2° $-a^2 - 4b^2 + 4ab = \ldots$	$-(a + 2b)^2$	$-(a - 2b)^2$	$(-a - 2b)^2$
3° $(-3x + 6)^2 = \ldots$	$9(x - 2)^2$	$-9(x - 2)^2$	$-3(x - 2)^2$
4° $-(2x + 3)(2x - 3) = \ldots$	$-4x^2 - 9$	$-4x^2 + 9$	$4x^2 + 9$

21 Développer et réduire les expressions algébriques :

1° $P(x) = (x + 4)^2 \times (x - 4)^2$; $Q(x) = \left[36 - (x - 6)^2\right]^2$.

2° $R(x) = [6x - 2(x - 1)]^2 - [4x - (-x + 3)]^2$.

3° $S(x) = 7 - 2(2x + 1)^2 - (3 - 2x)(3 + 2x) + 3(1 - x)^2$.

22 Pour chaque expression algébrique, faire apparaître un facteur commun, puis factoriser :

1° $A = (3x - 4)^2 + (4 - 3x)(x + 2) - 3x + 4$.

2° $B = (4x - 10)(3x - 1) - (4x^2 - 25) - (5 - 2x)^2$.

3° $C = (2x - 6)^2 - 3(x - 3)(3x + 1) - x^2 + 9$.

4° $D = (x + 3)(7x - 2) - (2 - 7x)(2x + 3) - 49x^2 + 28x - 4$.

Chapitre 7

Identités remarquables

Savoir Être Compétent

23 Pour chaque expression algébrique, grouper convenablement, puis factoriser :

$E = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$; $F = 4x^3 - 16x^2 - 9x + 36$.

24 Factoriser les différences de deux carrés :

$G = 4(x-1)^2 - 9$; $H = 25 - 16(2x-1)^2$; $I = 25(x+1)^2 - 16(2x-1)^2$.

25 Écrire chacune des expressions suivantes sous la forme d'un produit de trois facteurs :

$J = x^3 - 9x$; $K = x^4 - 81$; $L = 9(x-1)(x-2)^2 + 4(1-x)$.

26 Soit l'expression algébrique $M = (xy+2)^2 + (x-2y)^2$.

1° Développer et réduire l'expression M.

2° En déduire une factorisation de l'expression M.

27 Deux nombres a et b sont tels que : $a + b = 8$ et $a - b = 3{,}5$.

Sans trouver a et b, calculer la valeur numérique de chacune des expressions :

$N = a^3 - ab^2 + a^2b - b^3$; $P = a^2 - (b-1)^2$

$Q = a(2b - 3a) - b(2a - 3b)$; $R = a^2(a+b) - 2ab(a+b) + b^2(a+b)$.